Μαθημα 3ο 12/3/2018

Ολοκληρωτικες Εξ.

Δ Για το γενικευμενο ολοκληρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ (*)

υπαρχουν οι εξης περιπτωσεις

1. Το ολοκληρωμα (*) δε συγκλινει για καμια τιμη του s, οπως συμβαινει π.χ για τη συναρτηση $f(t) = e^{t^2}$. Θα ελεγξουμε αν $\exists$ s τ.ω $\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{t^2} dt < \infty$. Ομως εαν

$g(t) = t^2$, $g(t) > 0$, $t > 0$. Επισης $\int_0^{+\infty} g(t)\, dt = +\infty$

Επισης

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{t^2 - st}}{t^2} = +\infty$$

Απο το οριακο κριτηριο συγκρισης

$$\int_0^{+\infty} e^{t^2 - st}\, dt = +\infty \quad \forall s$$

2. Ειναι να υπαρχουν οι τιμες του s ωστε $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt < \infty$

Σ'αυτη την περιπτωση εαν S το συνολο των s για τα οποια το γενικευμενο ολοκληρωμα συγκλινει, οριζω μια συναρτηση F με πεδιο ορισμου το S με

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt, \quad s \in S$$

Η συναρτηση F λεγεται μετασχηματισμος Laplace της f και συμβ. επισης $\mathcal{L}[f]$ ή $\mathcal{L}\{f(t)\}$

Καποιες συναρτησεις

1. $f(t) = c \quad , t \geq 0$ (γιατι ενδιαφερομαι για το γενικ. ολοκλ. απο 0 εως $+\infty$)

Εχουμε

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot c \, dt = \lim_{k \to +\infty} c \int_0^{k} e^{-st}\, dt$$

Εαν $s \leq 0$ τοτε $\int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt$ δεν συγκλινει

Εαν $s > 0$ τοτε $\lim_{k \to +\infty} c \int_0^{k} e^{-st}\, dt = c \lim_{k \to +\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{k} = \frac{c}{s}$

Αρα $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{c}{s} \quad , s > 0$

2. $f(t) = e^{t} \quad , t \geq 0$ τοτε $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{t(1-s)}\, dt$

• Αν το $(1-s) \geq 0 \Rightarrow s \leq 1$ το γενικ. ολοκλ.
$\int_0^{+\infty} e^{t(1-s)}\, dt$ δε συγκλινει

• Αν $s > 1$ τοτε $\int_0^{+\infty} e^{t(1-s)}\, dt = \lim_{k \to +\infty} \int_0^{k} e^{t(1-s)}\, dt =$

$$= \lim_{k \to +\infty} \left[\frac{1}{1-s} \left(e^{k(1-s)} - 1 \right) \right] = \frac{1}{s-1}$$

Αρα $\mathcal{L}\{e^{t}\} = \frac{1}{s-1} \quad , s > 1$

3. $f(t) = t \quad , \quad t \geq 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, t\, dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^{k} e^{-st} \cdot t\, dt$$

Εχουμε

$$\int_0^{k} e^{-st} \cdot t\, dt = \int_0^{k} \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right)' t\, dt =$$

$$= \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \cdot t\right) + \int_0^{k} \frac{1}{s} e^{-st}\, dt$$

Τοτε

αν $s>0$: $\lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sk} \cdot k\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{-\frac{1}{s} k}{s k} = 0$

και $\lim_{k\to\infty} \left[-\frac{1}{s^2} (e^{-sk} - 1)\right] = \frac{1}{s^2}$

αν $s \leq 0$ τοτε το ολοκληρωμα $\int_0^{k} e^{-st} \cdot t\, dt$ δε συγκλινει

Αρα $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \quad , \quad s>0$

Επαγωγικα αποδ. οτι $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad , \quad s>0$

4. $f(t) = \sin t$ τοτε $\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t\, dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^{k} e^{-st} \sin t\, dt =$

$$\overset{\text{παραγ.}}{\underset{\text{ολοκλ.}}{=}} \lim_{k\to+\infty} \int_0^{k} e^{-st} (-\cos t)'\, dt$$

Για $s>0$: $\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t\, dt < \infty$ ενω για $s \leq 0$ το

$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t\, dt$ δε συγκλινει

Scanned by CamScanner

$\mathcal{L}\{\sin t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$, $s>0$

όμοια $\mathcal{L}\{\cos t\} = \dfrac{s}{s^2+1}$, $s>0$

Θεώρημα

Εάν f, g πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο $[0,+\infty)$ και c_1, c_2 σταθερές. Τότε $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ για $s>s_0$ και $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ $s>s_0$ τότε

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 F(s) + c_2 G(s)$$

απόδειξη

Εφόσον $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ για $s>s_0$ έπεται ότι $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$

συγκλίνει για $s>s_0$. Το ίδιο ισχύει και για τα

$\int_0^{+\infty} e^{-st} g(t)\,dt$ δηλ. $\int_0^{+\infty} e^{-st} g(t)\,dt < \infty$, $s>s_0$

οπότε

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \left(c_1 f(t) + c_2 g(t)\right) dt < \infty \text{ διότι}$$

$$c_1 \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt < \infty + c_2 \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t)\,dt < \infty$$

Συνεπώς

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \left(c_1 f(t) + c_2 g(t)\right) dt =$$

$$= c_1 \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt + c_2 \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t)\,dt =$$

$$= c_1 F(s) + c_2 G(s) \quad , s>s_0$$

Scanned by CamScanner

Θεώρημα

Εάν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ $\quad s > s_0$ και αν a είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{για } s > a \cdot s_0 \text{ και } a > 0$$

απόδειξη

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(at)\,dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^{k} e^{-st} f(at)\,dt$$

Άλλα

$$\int_0^{k} e^{-st} f(at)\,dt \; \frac{w = at}{dw = a\,dt} \; \frac{1}{a} \int_0^{ak} e^{-s\frac{w}{a}} f(w)\,dw$$

Θέτω $s_1 = s/a$ $\quad (+)$

άρα $\displaystyle\int_0^{k} e^{-st} f(at)\,dt = \frac{1}{a} \int_0^{ak} e^{-s_1 w} f(w)\,dw =$

$$= \frac{1}{a} F(s_1) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad s > a s_0$$

$(+)$ $\quad s_1 = \frac{s}{a} > s_0$

Πχ

Να υπολογιστεί $\mathcal{L}\{\cos 5t\}$

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}, \quad s > 0$$

$$\mathcal{L}\{\cos 5t\} = \frac{1}{5} \frac{(s/5)}{(s/5)^2 + 1} = , \quad s > 0$$

$$= \frac{s}{s^2+25}$$

Θεώρημα

Εάν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $s > s_0$ τότε για κάθε σταθερό πραγματικό αριθμό a έχουμε

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = F(s-a), \quad s > a + s_0$$

απόδειξη

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) e^{at}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{at-ts} f(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t(s-a)} f(t)\, dt = \lim_{k\to+\infty} \int_0^k e^{-(t-a)} f(t)\, dt$$

αλλά $\int_0^k e^{-t(s-a)} f(t)\, dt \overset{s_1 = s-a}{=\!=} \int_0^k e^{-s_1 t} f(t)\, dt$ τότε

$\lim_{k\to+\infty} \int_0^k e^{-s_1 t} f(t)\, dt$ συγκλίνει εάν $s_1 > s_0$ ή $s - a > s_0$

ή $s > s_0 + a$

και έτσι

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{at}\} = \lim_{k\to+\infty} \int_0^k e^{-s_1 t} f(t)\, dt = F(s_1) = F(s-a), \quad s > s_0 + a$$

π.χ.

$\mathcal{L}\{e^{-t}\sin 5t\} = ;$

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{1+s^2} = F(s), \quad s > 0$$

$$\mathcal{L}\{\sin 5t\} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1+(s/5)^2}\right) = \frac{5}{s^2+25}, \quad s > 0$$

Εδώ $a = -1$: όπου s θέτω $s+1$

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\sin 5t\} = \frac{5}{(s+1)^2 + 25}$$

Θεώρημα

Εάν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ $s > s_0$ και $a > 0$ εάν

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a), & \text{για } t \geq a \\ 0, & \text{για } 0 \leq t < a \end{cases}$$

Τότε $\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as} F(s)$, $s > s_0$

απόδειξη

Για $s > s_0$ έχουμε

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \lim_{k \to \infty} \int_0^k e^{-st} g(t)\,dt = \lim_{k\to\infty}\left(\int_0^a e^{-st} g(t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_a^k e^{-st} g(t)\,dt \right) = \lim_{k\to\infty} \int_a^k e^{-st} f(t-a)\,dt =$$

Θέτουμε $t-a=w$, $dt = dw$

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{k-a} e^{-(w+a)s} f(w)\,dw =$$

$$= \lim_{k\to\infty} e^{-as} \int_0^{k-a} e^{-ws} f(w)\,dw = e^{-as} F(s), \quad s > s_0$$

π.χ.

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t^2, & t \geq 1 \end{cases}$$

απάντηση

Εδώ $a=1$ θα προσδιορίσω την f: $f(t-1) = t^2$

Θέτουμε $t-1 = p \Rightarrow t = p+1$

οποτε $f(\varrho) = (\varrho+1)^2$

Αρα

$$f(t) = (t+1)^2 = t^2+2t+1$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{s^2+2s+1\} \overset{\text{λογω}}{\underset{\text{γραμμικοτητας}}{=}} \mathcal{L}\{s^2\} + \mathcal{L}\{2s\} + \mathcal{L}\{1\} =$$

$$= \frac{2!}{s^3} + \frac{2\mathcal{L}\{s\}}{2\cdot\frac{1}{s^2}} + \frac{1}{s} = \frac{2!}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}$$

Εθαφον

$$g(t) = \begin{cases} 0 & 0<t<1 \\ f(t-1) & t\geq 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-s\cdot 1}\,, \quad F(s) = e^{-s}\left[\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right]$$

Ορισμος

Μια συναρτηση f θα λεγεται κατα τμηματα συνεχης σε ενα διαστημα $I=[a,b]$ αν αυτο το διαστημα μπορει να διαιρεθει σ' ενα πεπερασμενο αριθμο υποδιαστηματων ε.ω να ισχυουν τα ακολουθα

1. Η f να ειναι συνεχης σε καθε τετοιο υποδιαστημα
2. Τα πλευρικα ορια της f σε καθε ενα απο τα ακρα καθε υποδιαστηματος να ειναι πραγματικοι αριθμοι

Σημειωση

Εαν η f συνεχης στο διαστημα $[a,b]$ τοτε ειναι και κατα τμηματα συνεχης

• Μια κατα τμηματα συνεχης συναρτηση στο $[a,b]$ ειναι και ολοκληρωσιμη στο $[a,b]$ (μιας και θα εχει (αν εχει) πεπερασμενο πληθος σημειων ασυνεχειας)

Ορισμος

Μια συναρτηση f θα λεγεται εκθετικης ταξης a (οπου a ενας σταθερος πραγματικος αριθμος) οταν $t \to +\infty$ εαν υπαρχουν σταθερες M και $t_0 > 0$ τ.ω

$$|f(t)| \leq M e^{at} \quad , \forall t > t_0 \quad , M > 0$$

→ Το a θα λεγεται ταξη της f

Ιδιοτητες για τις συναρτησεις εκθετικης ταξης

Εαν f και g ειναι συναρτησεις εκθετικης ταξης a_1 και a_2 αντιστοιχα καθως $t \to +\infty$ τοτε

1. Η $f \cdot g$ ειναι εκθετικης ταξης $a_1 + a_2$
2. Η $f + g$ ειναι εκθετικης ταξης $a = \max\{a_1, a_2\}$

▷ ασκηση η αποδειξη

Παρατηρηση

① Εαν μια συναρτηση ειναι εκθετικης ταξης γ καθως $t \to +\infty$, τοτε ειναι και εκθετικης ταξης δ $\forall \delta > \gamma$

② Μια κατηγορια συναρτησεων οι οποιες ειναι εκθετικης ταξης ειναι οι συναρτησεις για τις οποιες υπαρχει ενας σταθερος πραγματικος a τ.ω

$$\lim_{t \to +\infty} \left| e^{-at} f(t) \right| = \ell \quad (\text{να } \exists \text{ και να ειναι ισο με } \ell \in \mathbb{R})$$

απόδειξη

(2) Πράγματι έστω $\lim_{t\to\infty} |e^{-at} f(t)| = l \in \mathbb{R}$

Εάν πάρουμε $M > l$ και $\varepsilon := M - l > 0$

συνεπώς, εφόσον

$\lim_{t\to\infty} |e^{-at} f(t)| = l$ $\exists$ N τ.ω

$$\big|\, |e^{-at} f(t)| - l \,\big| < \varepsilon \quad \forall t \geq N$$

Άρα και

$$|e^{-at} f(t)| < l + \varepsilon = l + (M - l) = M$$

Συνεπώς

$$|f(t)| < M e^{at}, \quad \forall t \geq N$$

π.χ

Η συνάρτηση $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι εκθετικής τάξης.

Διότι για οποιαδήποτε $a > 0$, έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} t^n e^{-at} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^{at}} \overset{DLH}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{n t^{n-1}}{a e^{at}} = \dots =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{n!}{a^n e^{at}} = 0$$

Σύμφωνα με την προηγ. πρόταση είναι εκθετικής τάξης

Δ π.χ συναρτήσεις που δεν είναι εκθετική

$g(t) = e^{t^n}$, $n \in \mathbb{N} > 1$

αν υποθέσουμε ότι η g είναι εκθετικής τάξης, θα υπήρχαν

a, M και t_0 τ.ω

$$|e^{-at} g(t)| \leq M \quad \forall t \geq t_0$$

αλλα $e^{-at} g(t) = e^{t^n - at}$

και επειδη το $\lim_{t\to\infty} (t^n - at) = \lim_{t\to\infty} t^n\left(1 - \frac{a}{t^{n-1}}\right) = +\infty$

Έπεται οτι $\lim_{t\to\infty} e^{t-at} = +\infty$

Δηλαδη $\lim_{t\to\infty} e^{-at} g(t) = +\infty$ αρα g οχι εκθ ταξης.

Παρατηρηση

Αν για μια συναρτηση f ορισμενη στο $[0,+\infty)$

Ισχυει οτι $\lim_{t\to\infty} e^{-at}|f(t)| = +\infty$ ∀a σταθερο, τοτε $t\to+\infty$

f δεν ειναι εκθ συν.

αποδ

Πραγματι εστω οτι η f ειναι εκθ ταξης b

τοτε θα υπηρχε M και t_0 τ.ω

$|f(t)| \leq e^{bt} M \quad \forall t \geq t_0$

Διαιρωντας με e^{bt}

$|e^{-bt} f(t)| \leq M \quad \forall t \geq t_0$

$e^{-bt} |f(t)| \leq M \quad \forall t \geq b$

και συνεπως το οριο θα επρεπε να ειναι πραγματικος αριθμος

ατοπο (εχω $\lim(\ldots) = +\infty$)